Tentamenopgave[1]

I

Notatie $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $||X|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Formuleer de stelling van Weierstrass over het bestaan van minima en maxima voor functies van meerdere variabelen.

Beschouw de functie f, gedefinieerd op $\mathbb{R}^3$ door

(1) $$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + z$$

2. Toon aan dat voor alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

(2) $$|xy + z| \leq \frac{1}{2}||X||^2 + ||X||$$

Aanwijzing: Gebruik de ongelijkheid $2xy \leq x^2 + y^2$.

3. Toon aan dat $\lim_{||X|| \to \infty} f(X) = +\infty$.

Aanwijzing: Toon aan dat, met de notatie van vraag 1, $f(X) \geq \frac{1}{2}||X||^2 - ||X||$.

4. Toon aan dat de functie f op $\mathbb{R}^3$ een absoluut minimum heeft, en bepaal de waarde hiervan.

5. Beschouw nu de vergelijking

(3) $$f(x, y, z) = 0$$

Wat zegt de impliciete functie stelling over de mogelijkheid, gegeven deze vergelijking, z uit te drukken als functie van (x, y) ? In het bijzonder

i. Aan welke voorwaarde moet f voldoen om (lokaal) z te kunnen uitdrukken als functie van (x, y) zodat $f(x, y, z(x, y)) = 0$?

ii. Onder die voorwaarde, bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ en $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$.

II

Notatie: $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

1. Beschouw de transformatie $\Phi : (x, y) \mapsto (u, v)$ gedefinieerd op $\mathbb{R}^2_+$ door $u = x$, $v = x/y$. Toon aan dat Φ een diffeomorfisme is van $\mathbb{R}^2_+$ op $\mathbb{R}^2_+$ en bereken de inverse transformatie Φ^{-1}.

2. Zij $f : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ een functie van de vorm $f(x, y) = F(x/y)$ met $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Toon aan dat

(4) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

3. Toon omgekeerd aan dat een continu differentieerbare functie f op $\mathbb{R}^2_+$ die voldoet aan (4) een functie is van de vorm $F(x/y)$.

Aanwijzing: Stel $F(u, v) = f(x, y)$ (d.w.z. $F = f \circ \Phi^{-1}$) en toon aan dat $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$.

III

1. Formuleer de stelling over transformatie van de variabelen in een meervoudige integraal.

2. Gebruik deze stelling voor de berekening van de integraal

(5) $$\iint_D \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}.$$

waar $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

[1] De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk.